数理解析研究所講究録
361巻 1979年 164-177

特異点の変形と漸近展開

慶大・数理工　石浦信三
京大・数理研　上野喜三雄

§1 動機

A_2-singularity : $y^3=0$ の versal deformation $\varphi(x,y)=y^3+xy$; $X\times Y\longrightarrow \mathbb{C}$ を考える。ここで，X，及び Y は，$\mathbb{C}_x$，$\mathbb{C}_y$ の原点の近傍である。積分

$$u_i=\int\delta(t-\varphi(x,y))\,y^i dy \qquad (i=0,1) \tag{1}$$

を，$u=\delta(t-\varphi)$ の満す微分方程式系

$$\begin{cases}(t-\varphi)\,u=0\\ (D_x+\varphi'_x D_t)\,u=0, \quad (D_y+\varphi'_y D_t)\,u=0\end{cases} \tag{2}$$

の変数 y に関する積分と了解して，u_i $(i=0,1)$ の満すべき微分方程式を求めると，次の極大過剰決定系を得る。

$$\begin{cases}tD_t u=A_0D_t u+A_1 u\\ D_x u=BD_t u\end{cases} \tag{3}$$

where $u=\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}$, $\quad A_0=\begin{pmatrix} & \frac{2}{3}x\\ -\frac{2}{9}x^2 & \end{pmatrix}$ $\quad A_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \\ & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix} & -1\\ \frac{x}{3} & \end{pmatrix}$$

この極大過剰決定系(3)を versal deformation に伴う <u>system of Gauss-Manin</u> と呼ぶ。

同様に，A_3-singularity $y^4=0$ の versal deformation $\varphi(x,y)=y^4+x_2y^2+x_1y : X\times Y\longrightarrow \mathbb{C}$ を考える。積分

$$u_i=\int\delta(t-\varphi)\,y^i\,dy\quad(i=0,1,2)\tag{4}$$

を $u=\delta(t-\varphi)$ の満す方程式系

$$\begin{cases}(t-\varphi)u=0 & (D_y+\varphi'_yD_t)u=0\\ (D_{x_i}+\varphi'_{x_i}D_t)u=0 & (i=1,2)\end{cases}\tag{5}$$

の積分と了解し，u_i $(i=0,1,2)$ の満す方程式系を求めると，

$$\begin{cases}tD_tu=A_0D_tu+A_1u\\ D_{x_i}u=B_0^{(i)}D_tu+B_1^{(i)}u & (i=1,2)\end{cases}\tag{6}$$

where $u={}^t(u_0,u_1,u_2)$

$$A_0=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{4}x_1 & \frac{1}{2}x_2\\ -\frac{1}{8}x_1x_2 & \frac{-1}{4}x_2^2 & \frac{3}{4}x_1\\ \frac{-3}{16}x_2^2 & \frac{-1}{2}x_1x_2 & \frac{-1}{4}x_2^2\end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4} & & \\ & -\frac{2}{4} & \\ \frac{1}{8}x_2 & & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\qquad B_0^{(1)}=\begin{bmatrix} & -1 & \\ & & -1\\ \frac{1}{4}x_1 & \frac{2}{4}x_2 & \end{bmatrix}$$

$$B_0^{(2)}=\begin{bmatrix} & & -1\\ \frac{1}{4}x_1 & \frac{2}{4}x_2 & \\ & \frac{1}{4}x_2 & \frac{2}{4}x_2\end{bmatrix}\qquad B_1^{(2)}=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ \frac{-1}{4} & & \end{bmatrix}$$

という極大過剰決定系を得る。これを A_3-singularity の versal deformation に伴う system of Gauss-Manin という。さて，いずれの場合も，φ の critical subset，そして，discriminant を

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(x,y)\in X\times Y\,;\ \varphi'_y(x,y)=0\}\\ \Delta &= \{(x,\varphi(x,y))\in X\times \mathbb{C}\,;\ (x,y)\in\Sigma\}\end{aligned} \tag{7}$$

で定めると，上記の Gauss-Manin system は，Δ に沿って singularity をもつ $\mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}}$-module を定める。$\Delta$ は，$S=X\times\mathbb{C}$ の analytic hypersurface としての構造をもち，A_2, A_3 のそれぞれの場合の定義方程式は，

$$\begin{aligned}A_2\,;\ \Delta &= \{(x,t)\,;\ t^2+\tfrac{4}{27}x^3=0\}\\ A_3\,;\ \Delta &= \{(x,t)\,;\ t^3+\tfrac{1}{2}t^2x_1^2+\tfrac{9}{16}tx_1x_2^2+\tfrac{27}{256}x_2^4\\ &\qquad +\tfrac{1}{16}tx_1^4+\tfrac{1}{64}x_1^3x_2^2=0\}\end{aligned} \tag{8}$$

で与えられる。

一方，Arnold [1] は，積分 $\int\delta(t-\varphi)a(x,y)\,dy$ を考える代わりに実領域で振動積分

$$I(x,\tau)=\int e^{-i\tau\varphi(x,y)}\,\tilde{a}(x,y)\,dy\,,\qquad \tilde{a}(x,y)\in C_c^\infty \tag{9}$$

を考え，その $\tau\longrightarrow+\infty$ とするときの，漸近挙動を問題にした。このとき，φ は phase function と呼ばれ，A_2, A_3 等の simple singularity の versal deformation をとくに選ぶということは，stable Lagrangian を考えることに相当している。ところで

Fourier変換

$$\int e^{-i\tau\varphi}\tilde{a}\,dy=\int e^{-i\tau t}dt\int\delta(t-\varphi)\tilde{a}(x,y)\,dy \tag{10}$$

を通じて，この問題がGauss-Manin connectionとそのmonodromyと関連することは，Malgrange[1]により発見され，のちにPham[1]によって，microlocalな観点から体系的に論じられた。

いま実領域で考える代わりに，複素領域におけるLaplace変換

$$\int_\Gamma e^{\tau t}dt\int\delta(t-\varphi)a(x,y)\,dy \tag{11}$$

（ここで，Γは適当な積分路をえらぶ。）

を考察する。その為に，例えば，方程式系(3)のLaplace像wが満すべき方程式系

$$\left\{\begin{aligned} \tau D_\tau w &= \left\{\begin{pmatrix} & \frac{2}{3}x \\ -\frac{2}{9}x^2 & \end{pmatrix}\tau-\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \\ & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\right\}w \\ D_x w &= \begin{pmatrix} & 1 \\ -\frac{x}{3} & \end{pmatrix}\tau w \end{aligned}\right. \tag{12}$$

を論じよう。第1の方程式は，$x\neq 0$で，$\tau=\infty$に一級の不確定特異点をもち，$\frac{1}{3}$次，$\frac{2}{3}$次のBessel函数を混合することにより，その独立解を表示することができる。一方，第2の方程式は，この方程式系がmonodromy不変（あるいは，Stokes係数不変）にdeformされていることを意味している。

我々の研究目標は，振動積分(9)の漸近挙動を調べる代りに不確定特異点をもつ方程式系(12)の漸近解が示す$\tau=\infty$でのStokes現象と，もとの方程式系(3)との関係を論じることにある。

§2 Discriminant

A_2-singularityのversal deformationに議論を限ろう。$S=X\times\mathbb{C}$上の線型偏微分作用素の層$\mathcal{D}_S$を考え，方程式系(3)を$\mathcal{D}_S$-holonomic moduleとして了解しよう。まず，(3)を

$$\begin{cases} D_t u = (tI-A_0)^{-1}A_1 u \\ D_x u = B(tI-A_0)^{-1}A_1 u \end{cases} \tag{13}$$

とかきなおそう。このとき，discriminantの方程式Δは，

$$\Delta = \det(tI-A_0) = t^2+\frac{4}{27}x^3 \tag{14}$$

で与えられることに注意されたい。$\mathcal{O}_S$-free module $\mathcal{H}_\varphi^{(0)}$とその$\Delta$に沿う局所化

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varphi^{(0)} &= \mathcal{O}_S u_1 \oplus \mathcal{O}_S u_2 \\ \mathcal{H}_\varphi &= \bigcup_{k\geq 0}\Delta^{-k}\mathcal{H}_\varphi^{(0)} = \mathcal{H}_\varphi^{(0)}(\Delta) \end{aligned} \tag{15}$$

を考えよう。方程式(13)により，$\mathcal{H}_\varphi$には，$\mathcal{D}_S$-moduleの構造が入いる。(13)によって定まるΔに沿ってpoleをもつmeromorphic connectionがいわゆるGauss-Manin connectionに他ならない。(参照 Saito [1], [2])

斎藤氏の理論との関係を少し述べよう。(13)の才1方程式から，形式的にD_tを払って，

$$D_t^{-1}u=(I+A_1)^{-1}(tI-A_0)u \tag{16}$$

で，$D_t^{-1}:\mathcal{H}_\varphi^{(0)}\longrightarrow\mathcal{H}_\varphi^{(0)}$という単射を導入し，

$$\mathcal{H}_\varphi^{(k)}=D_t^{k}\mathcal{H}_\varphi^{(0)} \qquad (k\in\mathbb{Z}) \tag{17}$$

というgood filtrationを導入する，一方，写像

$$\Phi(x,y)=(x,\varphi(x,y))\,;\,X\times Y\longrightarrow X\times\mathbb{C}$$

による

$$\Omega_\varphi=\Omega^1_{X\times Y/X}/d_y\varphi\wedge\Omega^0_{X\times Y/X} \tag{18}$$

の直像を考え，これもΩ_φと書くことにすると，Ω_φの$\mathcal{O}_{X\times Y}$-moduleとしてのsupportは，Σであり，$\mathcal{O}_S$-moduleとしてのsupportがΔということになる。

このとき，(18)式は，$\mathcal{O}_S$-isomorphism

$$\Omega_\varphi\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}_\varphi^{(0)}/\mathcal{H}_\varphi^{(-1)} \tag{19}$$

にちょうど対応している。さて一般に，斎藤氏により，$\mathcal{H}_\varphi^{(0)}$はS上のvector fieldのなす，$\mathcal{O}_S$-free module Der_Sと$\mathcal{O}_S$-isomorphism

$$\textcircled{H}\,;\,\mathrm{Der}_S\longrightarrow\mathcal{H}_\varphi^{(0)} \tag{20}$$

$$D_t\longmapsto u_0,\qquad -D_x\longmapsto u_1$$

により同一視できることが示されている，そこで，

$$\begin{pmatrix}v_0\\ v_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}tD_t+\frac{2}{3}xD_x\\ \frac{2}{9}x^2D_t-tD_x\end{pmatrix}$$

$$= (tI - A_0)\begin{pmatrix} D_t \\ -D_x \end{pmatrix} = Ⓗ^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}D_t^{-1}u_0 \\ \frac{2}{3}D_t^{-1}u_1 \end{pmatrix} \qquad (21)$$

で定まる Der_S の元 v_0, v_1 を考えよう。$v_0 u = A_1 u$ となるのでとくに v_0 を Euler operator と呼ぶ。

このとき，

$$\begin{cases} v_0 \Delta = 2\Delta \\ v_1 \Delta = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

で方程式系(22)は，discriminant Δ を定数倍を除いて決定してしまう，いま，

$$\mathrm{Der}_S(\log \Delta) = \{ v \in \mathrm{Der}_S \,;\, v\Delta \in \Delta \mathcal{O}_S \}$$

とおくと，v_0, v_1 は，$\mathrm{Der}_S(\log \Delta)$ の $\mathcal{O}_S$-basis をなす。

短完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}_S(\log\Delta) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_S & \longrightarrow & \Omega_\varphi & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow Ⓗ & & \downarrow Ⓗ & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_\varphi^{(-1)} & \longrightarrow & \mathcal{H}_\varphi^{(0)} & \longrightarrow & \Omega_\varphi & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (23)$$

において式(21)は，v_0, v_1 が $\mathrm{Der}_S(\log\Delta)$ の $\mathcal{O}_S$-basis を与えることと，$\frac{1}{3}D_t^{-1}u_0$, $\frac{2}{3}D_t^{-1}u_1$ が $\mathcal{H}_\varphi^{(-1)}$ の $\mathcal{O}_S$-basis を与えることの同等性を主張しているのである。

v_0 をとくに Euler operator と呼んだ。一般に simple singularity の versal deformation でも，その system of Gauss-Manin を explitに求めることは，繁雑である。

（勿論，その discriminant を求めることも）しかし，v_0はいつも容易に求まる。因みに，A_l-singularity：$y^{l+1}=0$ の versal deformation

$$\varphi(x,y)=y^{l+1}+\sum_{i=1}^{l-1}x_i y^i$$

について，

$$u_k=\int\delta(t-\varphi)y^k dy \qquad (k=0,\cdots,l-1)$$

とおいて，その Euler operator を求めると

$$v_0=\left(tD_t+\sum_{i=1}^{l-1}\frac{l-i+1}{l+1}x_iD_{x_i}\right)$$

$$v_0\Delta=l\Delta \tag{27}$$

$$v_0u=\begin{bmatrix}-\frac{l}{l+1} & & \\ & \ddots & \\ & & -\frac{1}{l+1}\end{bmatrix}u$$

$$u={}^t(u_0,\cdots,u_{l-1})$$

といった具合になる。これから，とくに quasi-homogeneous polynomial である discriminant Δ の weight が，

$$\left(1;\ \frac{1}{l}\cdot\ \frac{1}{l}\frac{l}{l+1},\cdots,\frac{1}{l}\frac{2}{l+1}\right)$$

であることが判る。

このように，system of Gauss-Manin (3) から discriminant を記述する方程式 v_0, v_1 を導き出すことができる。以下考えたいことは，(3) と v_0, v_1 の関係をより具体的に把握することである。

§3 方程式系の変換

A_2-singularityの場合に戻ろう。方程式系(3)を分数巾の微分作用素(即ち"量子化された接触変換")を用いて，ϑ_0, ϑ_1に関する方程式系(22)に変換しようというのが，我々の当面の目標である。

結果は，次の通り。

命題　分数巾微分作用素による変換

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & \\ & P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

を考える。このとき，v_0, v_1の満す方程式系は，

$$\begin{cases} \vartheta_0 v = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \\ & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} v \\ \vartheta_1 v = 0 \end{cases} \quad \text{where } v = {}^t(v_0, v_1) \tag{29}$$

である。

(29)から，vはconst倍を除いて，

$$v = \begin{pmatrix} \Delta^{-\frac{1}{3}} \\ \Delta^{-\frac{1}{6}} \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

上に述べた変換は，解uの積分表示；Gauss超幾何函数のEuler積分表示；に他ならない。方程式(　)のひとつの解を超幾何函数$F(\alpha, \beta; \gamma; t)$を用いて書くと，

$$u = x^{-1}\left[\begin{array}{l} F\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{3}{2}; \frac{t-t_0}{2t_0}\right) \\ -\frac{3t_0}{x} F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}; \frac{3}{2}; \frac{t-t_0}{2t_0}\right) \end{array}\right], \quad t_0 = 2i\left(\frac{x}{3}\right)^{3/2} \tag{31}$$

となる。$F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ の Euler 積分表示

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = cte \int_1^\infty t^{\alpha-\gamma}(t-1)^{\gamma-\beta-1}(t-x)^{-\alpha} dt \tag{32}$$

を一般化された微分

$$(D_x^\lambda f)(x) = cte \int_1^\infty (t-x)^{-\lambda-1} f(t) dt \tag{33}$$

を用いて書き直すと

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = cte\, D_x^{\alpha-1}\left[x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}\right] \tag{34}$$

という表示をもつ。これと( )を合わせて，結論

$$\begin{cases} \Delta^{\frac{1}{2}} x^{-1} D_t^{\frac{1}{3}} u_0 = cte\, \Delta^{-\frac{1}{3}} \\ \Delta\, x^{-2} D_t^{\frac{2}{3}} u_0 = cte\, \Delta^{\frac{1}{6}} \end{cases}$$

を得る。しかし，命題自体の証明は，純粋に代数化できる。

このような分数巾の微分作用素による変換，即ち，量子化された接触変換を導入した動機は，一般の simple singularity の deformation の場合に，discriminante の満す方程式系が，system of Gauss-Manin を具体的な level でどの程度統制しているかを知りたい為である。

§4 Stokes係数の決定

A_2-singularityのLaplace像の満す方程式系

$$
\begin{cases}
\tau D_\tau w = \left\{ \begin{pmatrix} & \frac{2}{3}x \\ -\frac{2}{9}x^2 & \end{pmatrix} \tau - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \\ & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\} w \\[2ex]
D_x w = - \begin{pmatrix} & -1 \\ \frac{x}{3} & \end{pmatrix} \tau w
\end{cases}
\qquad (12)
$$

を考える。この方程式に変換

$$
w = \begin{pmatrix} \tau^{\frac{1}{3}} & \\ & \tau^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} v \qquad (35)
$$

を施すと,

$$
\begin{cases}
\left\{ \vartheta_0 + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \\ & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\} v = 0 \\[2ex]
\vartheta_1 v = 0
\end{cases}
\qquad (36)
$$

を得る。但し, ϑ_0, ϑ_1は, 次の様に定義される。

$$
\vartheta_0 = \tau D_\tau - \frac{2}{3} x D_x , \quad \vartheta_1 = D_\tau D_x + \frac{2}{9} x^2 \tau
$$

更に, vをLaplace逆変換: $v = \int_\Gamma e^{\tau t} R(t)\, dt$; すると, Rは次の方程式を満す。

$$
\begin{cases}
\left\{ \vartheta_0 + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \\ & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\} R = 0 \\[2ex]
\vartheta_1 R = 0
\end{cases}
\qquad (37)
$$

ゆえに, $R = {}^t(\Delta^{-\frac{1}{6}}, \Delta^{\frac{1}{6}})$がconst倍を除いて成立する。従って, もとの$w$は, 次の積分表示をもつ。

<u>命題</u>

$$w=\begin{pmatrix} \tau^{\frac{1}{3}}\int_{\Gamma} e^{\tau t}\Delta^{-\frac{1}{6}}dt \\ \tau^{\frac{2}{3}}\int_{\Gamma} e^{\tau t}\Delta^{\frac{1}{6}}dt \end{pmatrix} \tag{38}$$

ここで，積分路Γは，積分が収束するようにとる。又，Γに応じて，上の方程式の独立解が得られる。

<u>Remark</u>　上の積分表示は，Hankel 函数の積分表示

$$H_\nu^{(1,2)}(\tau)=cte\left(\frac{\tau}{2}\right)^{\nu}\int_{\Gamma_{1,2}} e^{i\tau t}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

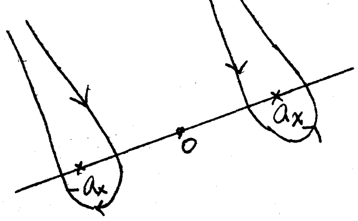
に対応している。

さて，Laplace像の満す方程式(12)の解の基本系として，次のものをとる。

$$Y_1(\tau)=\begin{pmatrix} \tau^{\frac{1}{3}}\int_{\Gamma_{1,x}} e^{\tau t}\Delta^{-\frac{1}{6}}dt & \tau^{\frac{1}{3}}\int_{\Gamma_{2,x}} e^{\tau t}\Delta^{-\frac{1}{6}}dt \\ \tau^{\frac{2}{3}}\int_{\Gamma_{1,x}} e^{\tau t}\Delta^{\frac{1}{6}}dt & \tau^{\frac{2}{3}}\int_{\Gamma_{2,x}} e^{\tau t}\Delta^{\frac{1}{6}}dt \end{pmatrix} \tag{39}$$

但し，$\Gamma_{1,2,x}$は次のものである。

（$x\neq 0$で，xをfix したときの，t-平面のpicture）



$$a_x=2i\left(\frac{x}{3}\right)^{3/2}$$

積分路の漸近方向は，$Re\,\tau t\longrightarrow -\infty$ as $|t|\longrightarrow +\infty$となるようにとる。$Y_1(\tau)$の漸近展開は次の如くなる。

$$Y_1(\tau)\sim\left\{\begin{pmatrix} r_1(\frac{1}{3}) & r_2(\frac{1}{3}) \\ r_1(\frac{2}{3}) & r_2(\frac{2}{3}) \end{pmatrix}+O(\eta^{-1})\right\}\eta^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{i\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\eta\right\} \tag{40}$$

in $S_1=\{-\pi<\arg\eta<\pi\}$

ここで，$\eta=2\left(\frac{x}{3}\right)^{3/2}$であり，又 $\gamma_j(\nu)$は，νとxにdependする。さて，角領域S_2, S_3を

$$S_2=\{0<\arg\eta<2\pi\},\quad S_3=\{\pi<\arg\eta<3\pi\}$$

によって定義しよう。(18)の解の基本系Y_2, Y_3で，

$Y_j \sim$ the same asymptotic expansion as (40) in S_j, $j=2,3$

となるものを考える。このとき，

$$Y_2=Y_1C_1,\qquad Y_3=Y_2C_2 \tag{41}$$

という関係を得るが，これらのnon-singular行列をStokes係数というのである。通常，Stokes係数を求めることは，困難な問題であるが，今の場合C_1, C_2は，積分表示(39)のあるおかげで，比較的容易に求められ，

$$C_1=\begin{pmatrix}1 & e^{\frac{\pi i}{3}}\\ & 1\end{pmatrix},\qquad C_2=\begin{pmatrix}1 & \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} & 1\end{pmatrix} \tag{42}$$

を得る。

我々は，複素領域におけるoscillatory integralの漸近挙動の問題を，この様にある解の基本系達の漸近展開とStokes係数を決定する，即ち，Stokes現象を解析するという方向で精密化していきたいと思う。

Reference

V. I. Arnold [1]; Remarks on the method of stationary phase and Coxeter numbers, (In Russian). Russ. Math. Surv. vol 28, No 5, 1973, pp 17-44.

B. Malgrange [1]; Integrals asymptotiques et monodromie. Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup 7 pp 405-430.

F. Pham [1]; Caustiques, phase stationarie et micro-fonctions. Acta, Sci. Vietnamicarnm 1977

K. Saito [1]; On the uniformization of complement of discriminant loci, 1975. Several Complex Variables. AMS, Providence

[2], 78-79年度 東京大学での講義.